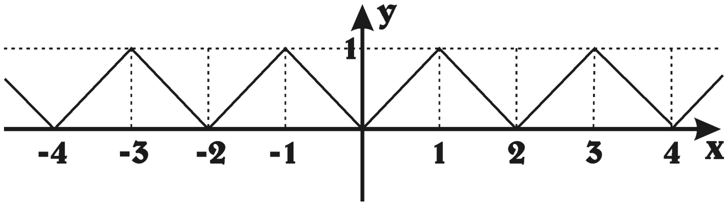
Pismeni ispit iz Analize III, 27.01.2014.
ispit pisati isključivo hemijskom olovkom

1. Funkciju definisanu grafikom pretvoriti u Fourier-ov red.



Dobijeni rezultat iskoristiti za sumiranje reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

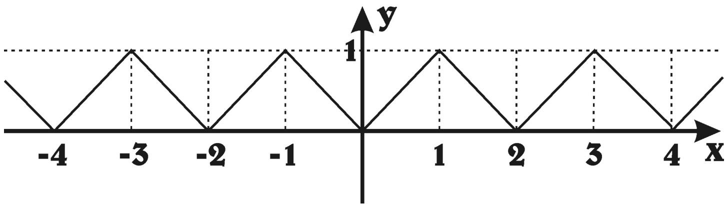
2. Isključivo primjenom dvostrukog integrala izračunati površinu figure koju prave linije $y^2 = -x$, $y^2 = -9x$ i $x = -9$.

3. Izračunati površinu dijela konusa $y^2 = 2xz$ koji se nalazi u prvom oktantu između površina $x = 1$ i $z = 3$.

4. Izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\vec{v} = (xz, -yz^2, xy)$ duž zatvorene linije $L : \begin{cases} z = x^2 - y^2 + 2a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$.

Pismeni ispit iz Analize III, 27.01.2014.
ispit pisati isključivo hemijskom olovkom

1. Funkciju definisanu grafikom pretvoriti u Fourier-ov red.



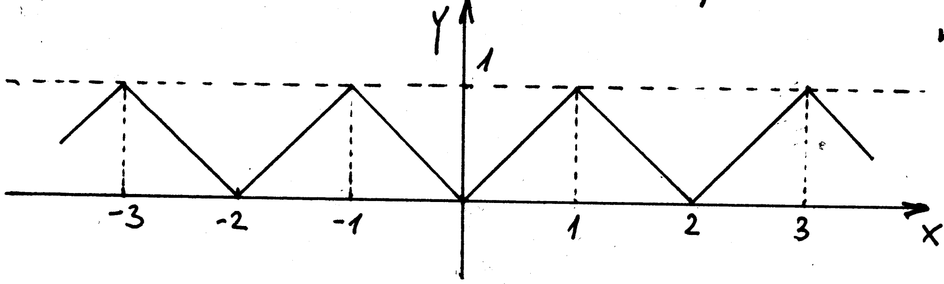
Dobijeni rezultat iskoristiti za sumiranje reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

2. Isključivo primjenom dvostrukog integrala izračunati površinu figure koju prave linije $y^2 = -x$, $y^2 = -9x$ i $x = -9$.

3. Izračunati površinu dijela konusa $y^2 = 2xz$ koji se nalazi u prvom oktantu između površina $x = 1$ i $z = 3$.

4. Izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\vec{v} = (xz, -yz^2, xy)$ duž zatvorene linije $L : \begin{cases} z = x^2 - y^2 + 2a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$.

(#) F-ju definisanu grafikom razviti u Fourierov red. Dobijeni rezultat iskoristiti za sumiranje reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.



Rj: Sa grafika možemo primetiti da je f-ja parna i periodična perioda 2. F-ju je dovoljno razviti u Fourierov red u intervalu $[-1,1]$, pa kako je f-ja parna imaćemo da su $b_n=0\ \forall n$.
Ako f-ju označim sa $f(x)$ na intervalu $[-1,1]$ imamo
$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ -x, & -1\le x\le 0\end{cases}$$

Ako je $f(x)$ integrabilna f-ja na intervalu $[-l,l]$ Fourierove koeficijente računamo po formulama
$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

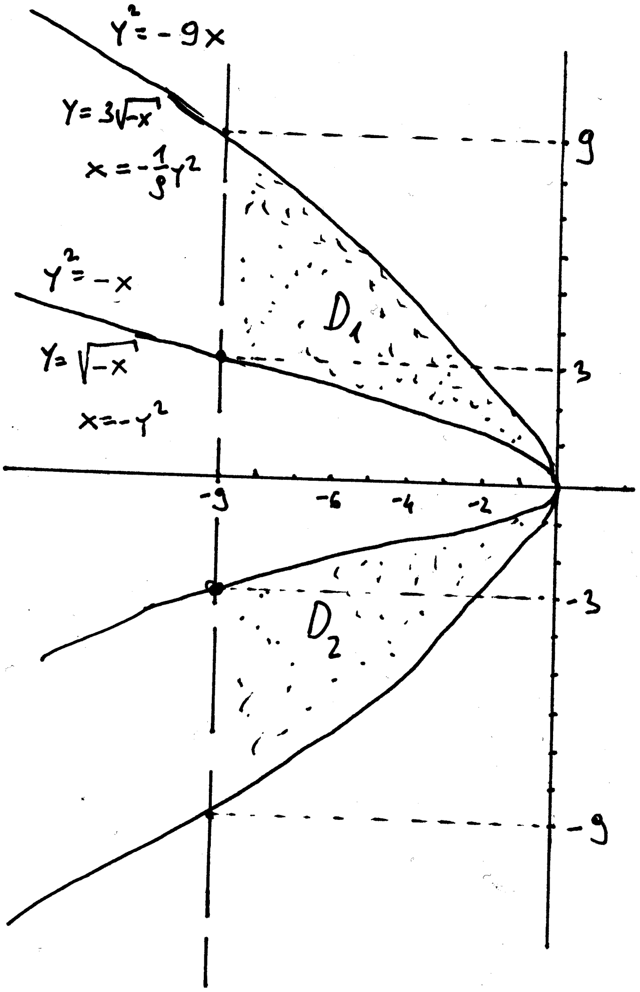
Fourierov red f-je $f(x)$ je tad oblika:
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

F-ja je parna:
$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx=2\int_0^1 x\,dx=2\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=1$$
$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx=\begin{vmatrix} u=x & dv=\cos n\pi x\,dx \\ du=dx & v=\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\end{vmatrix}=$$
$$=\underbrace{\frac{2}{n\pi}x\sin n\pi x\Big|_0^1}_{=0}-\frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\,dx=-\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{(-1)}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1=2\,\frac{\cos n\pi-\cos 0}{n^2\pi^2}$$
$$a_n=2\,\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2},\quad b_n=0\ \forall n \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{-4}{(2n-1)^2}\cos(2n+1)\pi x$$
$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n+1)^2}$$
razlaganje f-je u Fourierov red

Za $x=0$, $f(0)=0 \Rightarrow$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

(#) Isključivo primjenom dvostrukog integrala izračunati površinu figure koju prave linije $y^2=-x$, $y^2=-9x$ i $x=-9$.

Rj.



$$P=\iint_{D_1} dx\,dy+\iint_{D_2} dx\,dy=2\iint_{D_1} dx\,dy$$

$$\iint_{D_1} dx\,dy=\int_{-9}^{0} dx\int_{\sqrt{-x}}^{3\sqrt{-x}} dy=\int_{-9}^{0} 2\sqrt{-x}\,dx$$

$$=36$$

$$P=2\cdot 36=72$$

II način - prvo po y-nu

$$\int_0^3 dy\int_{-y^2}^{-\frac{1}{9}y^2} dx+\int_3^9 dy\int_{-9}^{-\frac{1}{9}y^2} dx=\int_0^3 \frac{8}{9}y^2\,dy+\int_3^9\left(9-\frac{1}{9}y^2\right)dy=8+28=36$$

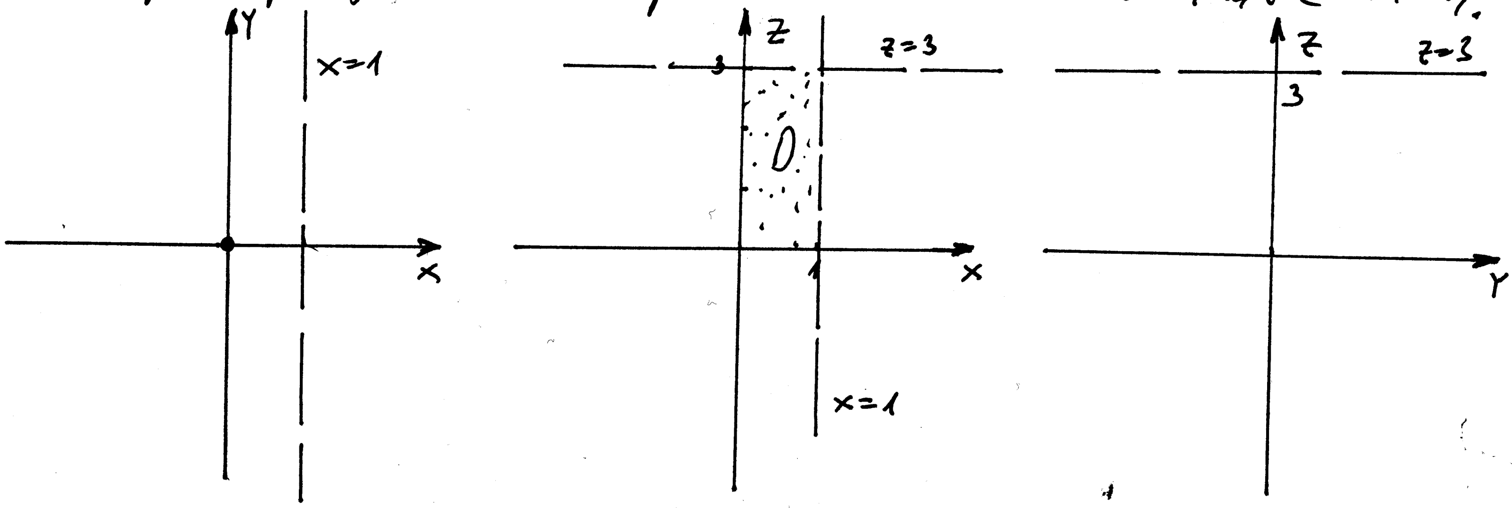
$$P=2\cdot 36=72$$

(#) Izračunati površinu dijela konusa $y^2=2xz$ koji se nalazi u prvom oktantu između površina $x=1$ i $z=3$.

Rj.

Površinu oblasti S računamo po formuli $P=\iint\limits_S dS$

Skicirajmo presjeke datih površina sa tri koordinatne ravni.



U prvom oktantu tražimo površinu dijela figure $Y=\sqrt{2}\sqrt{xz}$.

$$Y=\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{z},\quad Y'_x=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{x}},\quad Y'_z=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{z}}$$

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{1+\frac{z}{2x}+\frac{x}{2z}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2xz+z^2+x^2}{xz}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(x+z)^2}{xz}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{|x+z|}{\sqrt{xz}}\overset{\substack{\text{I oktant}\\ |x+z|=x+z}}{=\!=}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{xz}}+\frac{z}{\sqrt{xz}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{z}}+\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}}\right)$$

$$P=\iint\limits_S dS=\iint\limits_D\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{z}}+\sqrt{\frac{z}{x}}\right)dx\,dz=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 dx\int_0^3\left(\sqrt{x}\,z^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\,z^{\frac{1}{2}}\right)dz$$

$$=\dots=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 2\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{x}\right)dx=\dots=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 16\,\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{16\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{6}}{3}$$

Izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\vec{v} = (xz, -yz^2, xy)$ duž zatvorene linije L

$$L: \begin{cases} z = x^2 - y^2 + 2a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

Rj.

Cirkulaciju vektorskog polja $\vec{v}$ računamo po formuli

$$C = \int_C \vec{v}\, d\vec{r} = \int_C v_x dx + v_y dy + v_z dz$$

a u našem slučaju
$$C = \oint_C xz\, dx + (-yz^2)\, dy + xy\, dz$$

Jedan od pristupa za rješavanje ovog zadatka je da parametrizujemo krivu L. Kako je u krivoj data kružnica $x^2+y^2=a^2$ prvo ćemo parametrizirati nju pa dvije dobijene vrijednosti uvrstiti u z.

$x = a\cos\varphi$
$y = a\sin\varphi$
$0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\Rightarrow \quad z = a^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi + 2a = a^2(2+\cos 2\varphi)$$

$$dx = -a\sin\varphi, \quad dy = a\cos\varphi, \quad dz = -2a^2\sin 2\varphi$$

$$C = -\frac{a^4}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos 2\varphi)\sin 2\varphi\, d\varphi - \frac{a^6}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos 2\varphi)^2 \sin 2\varphi\, d\varphi -$$

$$- a^4\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^4}{8}(2+\cos 2\varphi)^2\Big|_0^{2\pi} + \frac{a^6}{12}(2+\cos 2\varphi)^3\Big|_0^{2\pi} -$$

$$-\frac{a^4}{2}\left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = -\pi a^4$$